Colegiul Național "Ștefan cel Mare" Suceava
SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA FILIALA SUCEAVA
CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENȚĂ "CĂTĂLIN ȚIGĂERU"
Ediția XVIII, 11 decembrie 2021

Clasa a VII-a
Bareme

Problemele tip grilă 1-6 conțin cinci răspunsuri posibile, dintre care cel puțin unul este corect, iar punctajul acordat unei astfel de probleme va fi acordat astfel:

• 0 puncte – dacă nu a fost indicat niciun răspuns sau există un răspuns incorect (indiferent de eventuala alegere a celorlalte răspunsuri) ;

• 5 puncte – dacă cel puțin un răspuns este corect, dar nu au fost precizate toate răspunsurile corecte;

• 10 puncte – dacă sunt indicate toate răspunsurile corecte ale problemei.

Pentru problema 7 punctajul corespunzător acordat unei rezolvări corecte și complete este de 30 puncte, acordate conform baremului.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

1. Dacă $\frac{x-y\sqrt{2021}}{y+\sqrt{2021}}=2021$, unde $x,y\in\mathbb{Q}$, atunci:

A) $x>0; y<0$

B) $x=2021; y=-2021^2$

C) $x<0; y<0$

D) $x=-2021^2; y=-2021$

E) $x=-2021^2; y=2021$

<u>**Soluție**</u>: $\frac{x-y\sqrt{2021}}{y+\sqrt{2021}}=2021 \Leftrightarrow x-y\sqrt{2021}=2021y+2021\sqrt{2021} \Leftrightarrow$

$x-2021y=\sqrt{2021}\left(y+2021\right)$. Cum $x,y\in\mathbb{Q}\Rightarrow\left(x-2021y\right)\in\mathbb{Q},\ \left(y+2021\right)\in\mathbb{Q}$.

Deducem că $y+2021=0\Leftrightarrow y=-2021$

și $x-2021y=0\Leftrightarrow x=2021y$

$x=-2021^2$. Atunci răspunsuri corecte sunt C și D.

2. Dacă $S=\left[\sqrt{1\cdot 2}\right]+\left[\sqrt{2\cdot 3}\right]+\left[\sqrt{3\cdot 4}\right]+\ldots+\left[\sqrt{2021\cdot 2022}\right]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numarului real *x*, atunci S este egal cu:

A) 2021	B) 2022	C) $\frac{2021\cdot 2022}{2}$	D) $2021\cdot 2022$	E) $\frac{2022\cdot 2023}{2}$

<u>Soluție</u>: $n<\sqrt{n(n+1)}<(n+1)\Rightarrow\left[\sqrt{n(n+1)}\right]=n, \forall n\in\mathbb{N}^*$

$S=1+2+...+2021=\frac{2021\cdot 2022}{2}$; Răspuns corect C.

3. Fie numerele $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2021}>0$, astfel încât:

$$\frac{a_1\sqrt{a_2}}{a_1+1}+\frac{a_2\sqrt{a_3}}{a_2+1}+\frac{a_3\sqrt{a_4}}{a_3+1}+...+\frac{a_{2020}\sqrt{a_{2021}}}{a_{2020}+1}+\frac{a_{2021}\sqrt{a_1}}{a_{2021}+1}=\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_{2021}}{2}$$

și $s=a_1+a_2+a_3+...+a_{2021}$. Alegeți varianta sau variantele corecte:

A) $s\vdots 43$	B) $s\vdots 47$	C) s număr prim	D) $s=2021$	E) $s=\frac{2021}{2}$

<u>Soluție</u>: Cum $a_1, 1>0$ și $m_g\le m_a$ avem: $\sqrt{a_1\cdot 1}\le\frac{a_1+1}{2}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{a_1}}{a_1+1}\le\frac{1}{2}/\cdot\sqrt{a_1a_2}$

$\Leftrightarrow\frac{a_1\sqrt{a_2}}{a_1+1}\le\frac{\sqrt{a_1a_2}}{2}\le\frac{1}{2}\cdot\frac{a_1+a_2}{2}=\frac{a_1+a_2}{4}$, cu egalitate pentru $a_1=a_2=1$.

Obținem $a_1=a_2=a_3=...=a_{2021}=1$, de unde $a_1+a_2+a_3+...+a_{2021}=2021$.
Răspunsuri corecte A, B și D.

4. Fie triunghiul ascuțitunghic *ABC*. Paralela prin punctul *A* la dreapta *BC* intersectează paralela prin *B* la *AC* în *M* și paralela prin *C* la *AB* în *N*, $BM\cap NC=\{D\}$.

Dacă $MS \parallel BN$, unde punctul *S* aparține prelungirii segmentului $[DN]$, $\{O\}=BN\cap AC$, $\{T\}=DO\cap MS$, iar $\{G\}=DT\cap AN$, atunci:

A) $MT=TS=BN$
B) Punctele *S*, *G*, *B* sunt coliniare
C) Punctele *B*, *A*, *T* sunt coliniare
D) $AG=\frac{1}{4}MN$.
E) $AG=\frac{1}{6}MN$.

<u>Soluție</u>: *ACBM*, *ANCB*, *ACDB* sunt paralelograme. $[BO]$ și $[NO]$ sunt linii mijlocii în ΔDMT și respectiv, ΔDTS, conform teoremei reciproce a liniei mijlocii în triunghi $\Rightarrow MT=TS=BN$.

Medianele triunghiului ΔDSM sunt concurente, deci punctele *S*, *G*, *B* sunt coliniare.
$AT \parallel SD$ și $AB \parallel SD$, deci punctele *B*, *A*, *T* sunt coliniare conform Axiomei lui Euclid.

$AG=MG-MA=\frac{2}{3}MN-\frac{1}{2}MN=\frac{1}{6}MN.$

Răspunsuri corecte: A, B, C și E.

5. Fie *ABCD* un trapez, cu $AB \parallel CD$ și *O* intersecția diagonalelor sale.

Dacă $A_{\Delta AOD} = 6\ cm^2$ și $A_{\Delta COD} = 4\ cm^2$, atunci aria trapezului este:

A)	B)	C)	D)	E)
$24\ cm^2$	$25\ cm^2$	$28\ cm^2$	$22\ cm^2$	$18\ cm^2$

Soluție: $A_{\Delta AOD} = A_{\Delta DAB} - A_{\Delta AOB} = \dfrac{AB \cdot h}{2} - A_{\Delta AOB}$, iar $A_{\Delta BOC} = A_{\Delta ABC} - A_{\Delta AOB} = \dfrac{AB \cdot h}{2} - A_{\Delta AOB}$, unde *h* este înățimea trapezului. Atunci $A_{\Delta AOD} = A_{\Delta BOC}$. Dar $A_{\Delta AOD} \cdot A_{\Delta BOC} = A_{\Delta DOC} \cdot A_{\Delta AOB}$ $\Rightarrow A_{\Delta AOB} = 9cm^2$ iar $\Rightarrow A_{\Delta ABCD} = 25cm^2$. Răspuns corect B.

6. Avem la dispoziție 10 plăci dreptunghiulare de dimensiuni $1\ cm \times 2\ cm$. Folosind un număr oarecare de plăci, construim un dreptunghi; îl stricăm, apoi construim un alt dreptunghi, cu alte dimensiuni și continuăm până când formăm toate dreptunghiurile diferite posibile.

Suma perimetrelor tuturor este:

A)	B)	C)	D)	E)
$S = 24\ cm$	$S = 20\ cm$	$S = 400\ cm$	$S = 450\ cm$	$S = 480\ cm$

Soluție:
Numărăm dreptunghiurile după lățimea lor. Observăm că aria oricărui dreptunghi este un număr par, cel mult egal cu $20cm^2$. Putem avea:

l	1	1	1	...	1	2	2	2	...	2	3	3	4	4
L	2	4	6	...	20	2	3	4	...	10	4	6	4	5

$$S = 2\left[\underbrace{(1+1+...+1)}_{10\ de\ 1} + \underbrace{(2+2+...+2)}_{9\ de\ 2} + (3+3) + (4+4)\right] +$$

$+2\left[(2+4+...+20)+(2+3+...10)+(4+6)+(4+5)\right] = 450m$. Răspuns corect D.

7. Pe laturile triunghiului echilateral se iau punctele $D \in [BC], E \in [AB], F \in [AC]$ astfel ca $BD = DC = BE + CF$. Determinați măsura unghiului EDF.

Soluție: Notăm $AB = AC = BC = 2a$ (ca fiind latura ΔABC echilateral). Dacă M este mijlocul laturii $[AB]$ și $CF = x \Rightarrow BE = a - x, AM = MB = a, AE = a + x, ME = x$.

Din $MD \parallel AC \Rightarrow m(EMD) = m(FCD) = 60°$.

În plus $DM = DC = a$ și $EM = CF = x \Rightarrow \Delta EMD \equiv \Delta FCD (L.U.L.)$

Atunci $m(EDM) = m(FDC) \Rightarrow m(EDF) = m(MDC) = 120°$.