Colegiul Național "Ștefan cel Mare" Suceava
SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA FILIALA SUCEAVA
CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENȚĂ "CĂTĂLIN ȚIGĂERU"
Ediția XVIII, 11 decembrie 2021

Clasa a VIII-a
Bareme

Problemele tip grilă 1-6 conțin cinci răspunsuri posibile, dintre care cel puțin unul este corect, iar punctajul acordat unei astfel de probleme va fi acordat astfel:

• 0 puncte – dacă nu a fost indicat niciun răspuns sau există un răspuns incorect (indiferent de eventuala alegere a celorlalte răspunsuri) ;

• 5 puncte – dacă cel puțin un răspuns este corect, dar nu au fost precizate toate răspunsurile corecte;

• 10 puncte – dacă sunt indicate toate răspunsurile corecte ale problemei.

Pentru problema 7 punctajul corespunzător acordat unei rezolvări corecte și complete este de 30 puncte, acordate conform baremului. Se acordă 10 puncte din oficiu.

1. Rezolvând în $\mathbb{R}$, inecuația:
$\frac{x-1}{2}+\frac{x-2}{3}+\ldots+\frac{x-2021}{2022}\le -2021$, se obține:

A) $(-\infty;0]$	B) $(-\infty;-1]$	C) $[0;+\infty)$	D) $[1;+\infty)$	E) $(-\infty;-2021]$

Soluție: $\left(\frac{x-1}{2}+1\right)+\left(\frac{x-2}{3}+1\right)+\ldots+\left(\frac{x-2021}{2022}+1\right)\le 0$

$\Leftrightarrow (x+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2022}\right)\le 0$. Cum $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2022}\right)$>0, deducem că

$\left.\begin{matrix} x+1\le 0 \\ x\in\mathbb{R}\end{matrix}\right\}\Rightarrow x\in(-\infty;-1]$. Răspuns corect: B.

**Ne cerem scuze pentru faptul că în tabelul cu cele 5 variante de răspuns din subiectul elevilor nu apare cea corectă. În rectificare apare la E, dar nu toți elevii au descărcat. Se acordă puctaj maxim în acestă situație pentru problema 1.*

2. Valorile întregi ale lui *x* pentru care $\dfrac{\sqrt{\frac{2021+x}{2021-x}}+\sqrt{\frac{2021-x}{2021+x}}}{\sqrt{\frac{2021+x}{2021-x}}-\sqrt{\frac{2021-x}{2021+x}}}\in\mathbb{Z}$, pot fi:

A) $x \vdots 43$	B) 2021	C) $x \vdots 47$	D) -2021	E) 1; 2021

Soluție: Dacă $t=\sqrt{\dfrac{2021+x}{2021-x}} \Rightarrow \dfrac{t+\frac{1}{t}}{t-\frac{1}{t}}=\dfrac{t^2+1}{t^2-1}=\dfrac{\frac{2021+x}{2021-x}+1}{\frac{2021+x}{2021-x}-1}=\dfrac{2\cdot 2021}{2x}=\dfrac{2021}{x}\in\mathbb{Z}$

Cum 2021=43$\cdot$47, iar $x\notin\{-2021;2021\}$ atunci răspunsurile corecte sunt: A, C.

3. Dacă $x+y-2\sqrt{xy}=1$ unde $x,y\in\mathbb{N}$, atunci:

A) Perechile de numere naturale care verifică relația sunt de forma:
$(x,y)\in\left\{\left((a-1)^2;a^2\right),\left((a+1)^2;a^2\right)\right\}$, unde $a\in\mathbb{N}$.

B) Perechile de numere naturale care verifică relația sunt de forma:
$(x,y)\in\left\{\left((a-1)^2;a^2\right),\left(a^2;(a-1)^2\right)\right\}$, unde $a\in\mathbb{N}$.

C) Numerele $x,y\in\mathbb{N}$ cerute sunt numerele pentru care media aritmetică o depășește pe cea geometrică cu $\frac{1}{2}$.

D) Perechile de numere naturale care verifică relația sunt de forma:
$(x,y)\in\left\{\left((a-1)^2;a^2\right),\left((a+1)^2;a^2\right),\left(a^2;(a-1)^2\right),\left(a^2;(a+1)^2\right)\right\}$, unde $a\in\mathbb{N}$.

E) Perechile de numere naturale care verifică relația sunt de forma:
$(x,y)\in\left\{\left((a-1)^2;(a+1)^2\right),\left((a+1)^2;(a-1)^2\right)\right\}$, unde $a\in\mathbb{N}$.

Soluție: $x+y-2\sqrt{xy}=1 \Leftrightarrow x+y-1=2\sqrt{xy} \Leftrightarrow x^2+y^2+1-2x-2y+2xy=4xy$
sau $x^2-2(1+y)x+(y-1)^2=0.$ În mulțimea $\mathbb{R}$, $x=1+y\pm\sqrt{4y}.$ Cum $x\in\mathbb{N}$, se impune $y=a^2, a\in\mathbb{N}$, de unde $x=(a\pm1)^2$. Cum ecuația este simetrică, mulțimea soluțiilor va fi:
$(x,y)\in\left\{\left((a-1)^2;a^2\right),\left((a+1)^2;a^2\right),\left(a^2;(a-1)^2\right),\left(a^2;(a+1)^2\right)\right\}$, unde $a\in\mathbb{N}$.
Remarcă: se cer numerele $x,y\in\mathbb{N}$ pentru care media aritmetică o depășește pe cea geometrică cu $\frac{1}{2}$.
Răspunsurile corecte sunt: C, D.

4. În cubul $ABCDA'B'C'D'$, punctele *M, N*, respectiv *P* sunt mijloacele muchiilor CC', $A'D'$, respectiv $C'D'$. O funcție trigonometrică a unghiului format de *BM* și *NP* poate fi:

A) $\frac{\sqrt{10}}{5}$	B) $\frac{\sqrt{15}}{5}$	C) $\frac{\sqrt{6}}{2}$	D) $\frac{\sqrt{6}}{3}$	E) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

Soluție: Fie *a* muchia cubului și *R* mijlocul lui DD'. Cum *ABMR* este dreptunghi $\Rightarrow AR \parallel BM$ iar din
$\left.\begin{array}{l} NP \parallel A'C' \\ A'C' \parallel AC \end{array}\right\} \Rightarrow NP \parallel AC$, atunci $\sphericalangle(BM;NP)=\sphericalangle(AR;AC)=\sphericalangle ARC$.

ΔRAC isoscel, $[RO]$ mediană $\Rightarrow [RO]$ înălțime; $AR=\frac{a\sqrt{5}}{2}$, $AO=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $RO=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\sin\sphericalangle RAO=\frac{\sqrt{15}}{5}$; $\cos\sphericalangle RAO=\frac{\sqrt{10}}{5}$.; $tg\sphericalangle RAO=\frac{\sqrt{6}}{2}$; $ctg\sphericalangle RAO=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Răspunsuri corecte: A, B, C, D.

5. Se consideră un tetraedru regulat $ABCD$ cu muchia de lungime a și $DO\perp(ABC)$. Dacă $M\in(DO)$ astfel încât $MA\perp MB$, atunci:

A) $MO=\frac{2}{3}DO$

B) M este mijlocul lui $[OD]$

C) $MO=\frac{1}{3}DO$

D) $DO=\frac{a\sqrt{6}}{3}$

E) $DO=\frac{a\sqrt{3}}{6}$

<u>Soluție</u>:

Fie $MO=x.$ Din ΔMOA obținem $MA^2=MO^2+AO^2\Rightarrow MA^2=x^2+\frac{3a^2}{9}\Rightarrow MA^2=x^2+\frac{a^2}{3}.$

Analog, din ΔMOB obținem $MB^2=x^2+\frac{a^2}{3}.$

Cum $MA\perp MB\Rightarrow MA^2+MB^2=AB^2\Rightarrow 2x^2+\frac{2a^2}{3}=a^2$, de unde $x=\frac{a\sqrt{6}}{6}$ și cum

$DO=\frac{a\sqrt{6}}{3}$, atunci M este mijlocul lui $[OD]$.

Răspunsuri corecte: B și D

6. Dacă dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic sunt :
$a=\left(x^2-y^2\right)\left(z^2-t^2\right), b=2xy\left(z^2-t^2\right)$ și $c=2zt\left(x^2+y^2\right)$, unde x, y, z, t sunt numere naturale cu $x\neq y$ și $z\neq t$, atunci lungimea diagonalei paralelipipedului este:

A) $d=\left(x^2+z^2\right)\left(y^2+t^2\right)\in\mathbb{N}$

B) $d=\left(x^2+t^2\right)\left(y^2+z^2\right)\in\mathbb{N}$

C) $d\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$

D) $d=\left(x^2+y^2\right)\left(z^2+t^2\right)\in\mathbb{N}$

E) $d=\left(x+y\right)^2\left(z+t\right)^2\in\mathbb{N}$

<u>Soluție</u>: Avem: $a^2+b^2=\left(z^2-t^2\right)^2\left[\left(x^2-y^2\right)^2+4x^2y^2\right]=\left(z^2-t^2\right)^2\left(x^2+y^2\right)^2$

Cum $d^2=a^2+b^2+c^2$ atunci

$d^2=\left(z^2-t^2\right)^2\left(x^2+y^2\right)^2+4z^2t^2\left(x^2+y^2\right)^2=\left(x^2+y^2\right)^2\left[\left(z^2-t^2\right)^2+4z^2t^2\right]=\left(x^2+y^2\right)^2\left(z^2+t^2\right)^2$

de unde $d=\left(x^2+y^2\right)\left(z^2+t^2\right)\in\mathbb{N}$

Răspuns corect D

7. Dacă $x \in (1;\infty)$, să se arate că $x^6 + 2x^3 \geq 6\left(x^4 - x^2\right) + 1$.

<u>Soluție</u>: Prin împărțire cu x^3, inegalitatea de probat devine

$x^3 + 2 - \frac{1}{x^3} \geq 6\left(x - \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 2 \geq 3\left(x - \frac{1}{x}\right)$ adevărată, căci pentru $t = x - \frac{1}{x} \geq 0$, se știe că $t^3 + 2 \geq 3t \Leftrightarrow (t-1)^2\left(t+2\right) \geq 0$.