Colegiul Național " Ștefan cel Mare " Suceava

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA FILIALA SUCEAVA

CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENȚĂ "CĂTĂLIN ȚIGĂERU"
Ediția XVIII, 11 decembrie 2021

Clasa a X-a
Bareme

Punctajul problemelor 1-6 poate fi:

- *0 puncte – dacă nu a fost dat niciun răspuns sau printre răspunsurile indicate există cel puțin unul incorect;*
- *5 puncte – dacă toate răspunsurile indicate sunt corecte, dar lipsește cel puțin un răspuns corect;*
- *10 puncte – dacă răspunsurile indicate coincid cu toate răspunsurile corecte ale problemei.*

Pentru problema 7 punctajul corespunzător acordat unei rezolvări corecte și complete este de 30 puncte.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție injectivă cu proprietatea $f\left(f\left(x\right)+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right),\forall x,y\in\mathbb{R}$. Dacă $a=f\left(2021\right)-f\left(2020\right)$, atunci:

A) $a=0$	B) $a>0$	C) $a=1$	D) $a<2$	E) $a=2$

<u>Soluție</u>: Înlocuim $y=0\Rightarrow f\left(f\left(x\right)\right)=f\left(x\right)+f\left(0\right),\forall x\in\mathbb{R}$.
Pentru $x=0, y=x\Rightarrow f\left(f\left(0\right)+x\right)=f\left(0\right)+f\left(x\right),\forall x\in\mathbb{R}$. Obținem astfel $f\left(f\left(x\right)\right)=f\left(x+f\left(0\right)\right)$ și din injectivitatea funcției *f* rezultă $f\left(x\right)=x+f\left(0\right),\forall x\in\mathbb{R}$.
Astfel $a=1$. Răspunsuri corecte: B, C și D.

2. Se consideră funcția $f:\left(0,\infty\right)\to\left(0,\infty\right)$, $f\left(x\right)=2^x+2^{\frac{1}{x}}$. Alegeți răspunsurile corecte:

A) Funcția *f* nu este funcție injectivă, dar este funcție surjectivă.
B) Restricția funcției la intervalul $\left[2,\infty\right)$ este inversabilă.
C) Valoarea minimă a lui $a\in\mathbb{R}$ pentru care funcția *f* este strict crescătoare pe $\left[a,\infty\right)$ este $a=1$.
D) Ecuația $f\left(x\right)=a$ are două soluții reale pentru orice $a\in\mathbb{N}, a>3$.
E) Există $a\in\left(0,\infty\right)$ pentru care ecuația $f\left(x\right)=a$ are soluție unică.

<u>Soluție</u>: Avem $f\left(x\right)=2^x+2^{\frac{1}{x}}\geq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{\frac{1}{x}}}=2\sqrt{2^{x+\frac{1}{x}}}\geq 2\sqrt{2^2}=4,\forall x\in\left(0,\infty\right)$, cu egalitate dacă și numai dacă $x=1$. De aici deducem că *f* nu este surjecție și deoarece $f\left(x\right)=f\left(\frac{1}{x}\right),\forall x\in\left(0,\infty\right)$, rezultă că *f* nu este nici injecție. Se arată ușor că *f* este strict crescătoare pe $\left[1,+\infty\right)$ și strict descrescătoare pe $\left(0,1\right]$. Avem $f\left(\left(0,1\right]\right)=f\left(\left[1,\infty\right)\right)=\left[4,\infty\right)$ și ecuația $f\left(x\right)=a$ are soluție unică pentru $a=4$, două soluții pentru $a>4$ și nicio soluție pentru $a\in\left(0,4\right)$. În concluzie, răspunsurile corecte sunt: C, D, E.

3. Fie $a,b,c\in(1,\infty)$ trei numere reale distincte, $x=\log_a(bc), y=\log_b(ac), z=\log_c(ab)$

Notăm $\alpha=\dfrac{x+y+z}{3}$, $\beta=xyz-3\alpha$ și $p=\alpha^3-3\alpha-2$. Atunci:

A) $0<\alpha<2$	B) $\alpha\in[2,\infty)$	C) $\beta=\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$	D) $\beta\in\mathbb{N}$	E) $p>0$

<u>Soluție</u>: Evident $3\alpha=(\log_a b+\log_b a)+(\log_c b+\log_b c)+(\log_a c+\log_c a)\geq 6\Rightarrow\alpha\geq 2$. Egalitatea nu poate avea deoarece numerele a,b,c sunt distincte. În continuare avem:

$\beta=\dfrac{(\lg b+\lg c)(\lg a+\lg b)(\lg a+\lg c)}{\lg a\cdot\lg b\cdot\lg c}-\dfrac{\lg b+\lg c}{\lg a}-\dfrac{\lg a+\lg c}{\lg b}-\dfrac{\lg a+\lg b}{\lg c}$ și prin efectuarea calculelor se obține $\beta=2$. Apoi $p=\alpha^3-3\alpha-2=(\alpha+1)^2(\alpha-2)>0$, iar răspunsurile corecte sunt: B, D, E.

4. Se consideră numerele naturale $a,b,c,d\geq 2$ cu proprietatea că $\log_a b=\dfrac{3}{2},\log_c d=\dfrac{3}{4}$ și $a-c=9$. Atunci:

A) $a>d$	B) $a\,\vdots\,5$	C) $c=2d$	D) $a-d=40$	E) $d\,\vdots\,4$

<u>Soluție</u>: Avem $a^3=b^2,c^3=d^4$ și fie $x,y>0$ astfel încât $a=x^2,b=x^3,c=y^4,d=y^3$. Din relațiile $x^2-y^4=9\Leftrightarrow(x-y^2)(x+y^2)=9$ obținem $x=5,y=2$, deci $a=25,b=125,c=16,d=8$. Răspunsurile corecte sunt: A, B, C, E.

5. Fie mulțimea $A=\{z\in\mathbb{C},|z-4i|+|z+3|=5\}$ și $m=\min\{|z|,z\in A\},M=\max\{|z|,z\in A\}$. Atunci:

A) $\operatorname{card}(A)>2$.

B) $4\operatorname{Re}(z)-3\operatorname{Im}(z)+12=0,\forall z\in A$.

C) $M>5$.

D) $m\cdot M=\dfrac{24}{5}$.

E) $\dfrac{m}{M}=\dfrac{3}{5}$.

<u>Soluție</u>: Cum $|z-4i|+|z+3|=5=|(z+3)+(4i-z)|$, rezultă că $z\in\{-3,4i\}$ sau există $t\in(0,\infty)$ astfel încât $z+3=t(4i-z)$. Dacă considerăm $z=x+iy$, atunci obținem $x+3+iy=t(-x+i(4-y)),t>0$, de unde obținem $A=\{x+iy\mid 4x-3y+12=0,x\in[-3,0],y\in[0,4]\}$. În acest caz, pentru toate numerele complexe din A obținem $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+\dfrac{16}{9}(x+3)^2}==\dfrac{1}{3}\sqrt{25x^2+96x+144}$. Din studiul funcției de gradul al doilea de sub semnul radicalului pe intervalul $[-3,0]$ obținem m= $m=\dfrac{12}{5},M=4$. Răspunsurile corecte sunt: A, B, E.

6. Fie $a \in \mathbb{R}^*$ și ecuația $\left(z+ai\right)^n + \left(z+a^2i\right)^n = 0, n \in \mathbb{N}^*, z \in \mathbb{C}$. Admitem cunoscut că ecuația are cel puțin o soluție reală. Atunci:

A) $|\alpha + ai| = |\alpha + a^2 i|$, pentru orice $\alpha \in \mathbb{C}$ soluție a ecuației date.

B) $a = 1$.

C) $a = -1$.

D) $a^{2n} = a^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

E) Pentru $a = -1$ toate soluțiile ecuației sunt reale.

<u>**Soluție**</u>: Dacă $\alpha \in \mathbb{C}$ este o soluție a ecuației date, atunci

$$\left(\alpha+ai\right)^n + \left(\alpha+a^2i\right)^n = 0 \Leftrightarrow \left(\alpha+ai\right)^n = -\left(\alpha+a^2i\right)^n \Rightarrow \left|\left(\alpha+ai\right)^n\right| = \left|\left(\alpha+a^2i\right)^n\right| \Rightarrow$$

$\Rightarrow \left|\left(\alpha+ai\right)\right| = \left|\left(\alpha+a^2i\right)\right|$. Dacă $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{\alpha^2+a^2} = \sqrt{\alpha^2+a^4} \Rightarrow a^2 = a^4 \Rightarrow a^2 = 1$.

Convine doar valoarea $a = -1$. În acest caz, din egalitatea $\left|\left(z-i\right)\right| = \left|\left(z+i\right)\right|$ se obține $z \in \mathbb{R}$, deci toate rădăcinile sunt reale. Răspunsurile corecte sunt: A, C, E.

7. Dacă $a_1, a_2, a_3, ..., a_{1000} \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că $\frac{1}{\sqrt[3]{a_1^{\,2}}} + \frac{1}{\sqrt[3]{a_2^{\,2}}} + \frac{1}{\sqrt[3]{a_3^{\,2}}} + ... + \frac{1}{\sqrt[3]{a_{1000}^{\,2}}} \geq 30$, demonstrați că cel puțin două din cele 1000 de numere sunt egale.

Dan Nedeianu, Drobeta Turnu Severin

Soluţie: Prin absurd, presupunem că numerele sunt distincte două câte două şi că $1 \leq a_1,\ 2 \leq a_2,\ ...,\ 1000 \leq a_{1000} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{a_1^{\,2}}} + \frac{1}{\sqrt[3]{a_2^{\,2}}} + ... + \frac{1}{\sqrt[3]{a_{1000}^{\,2}}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{1^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} + ... + \frac{1}{\sqrt[3]{1000^2}}$ 10p

Folosind inegalitatea mediilor, avem că $n + n + (n-1) \geq 3\sqrt[3]{n^2(n-1)} \overset{n \in N^*}{\Leftrightarrow} 3n - 1 > 3\sqrt[3]{n^2(n-1)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3\sqrt[3]{n^2} \cdot \sqrt[3]{n-1} + 3n > 1 \Rightarrow 3(\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n-1}) > \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$.

....10p

Rezultă că $30 \leq \frac{1}{\sqrt[3]{a_1^{\,2}}} + \frac{1}{\sqrt[3]{a_2^{\,2}}} + \frac{1}{\sqrt[3]{a_3^{\,2}}} + ... + \frac{1}{\sqrt[3]{a_{1000}^{\,2}}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{1^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} + ... + \frac{1}{\sqrt[3]{1000^2}} <$

$< 3\left[\left(\sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{0}\right) + \left(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{1}\right) + ... + \left(\sqrt[3]{1000} - \sqrt[3]{999}\right)\right] = 30$,

fals...10p