Clasa a XII-a
Bareme

Problemele 1-6 sunt probleme tip grilă, ce conțin cinci răspunsuri posibile, iar numărul răspunsurilor corecte este cuprins între 1 și 5. Punctajul unei astfel de probleme poate fi:

- *0 puncte – dacă nu a fost dat niciun răspuns sau printre răspunsurile indicate există cel puțin unul incorect;*
- *5 puncte – dacă toate răspunsurile indicate sunt corecte, dar lipsește cel puțin un răspuns corect;*
- *10 puncte – dacă răspunsurile indicate coincid cu toate răspunsurile corecte ale problemei.*

Pentru problema 7 se cere redactarea completă a soluției. Punctajul corespunzător acordat unei rezolvări corecte și complete este de 30 puncte.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

1. Pe mulțimea numerelor reale definim legea de compoziție $x \circ y = 3xy - 2x - 2y + m$, cu $m \in \mathbb{R}$. Considerăm mulțimea $G = \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$ și funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b,\ \ a, b \in \mathbb{R}$. Știm că G formează o structură de grup abelian în raport cu operația $\circ$, iar funcția f este un izomorfism între grupul $(G, \circ)$ și grupul multiplicativ al numerelor reale pozitive. Dacă $p = a + b + m$, atunci:

A) $m = \frac{4}{3}$	B) $a + b \in \mathbb{N}$	C) $p < 4$	D) $p > 4$	E) $m \vdots 2$

Soluție: Se obțin valorile $a = 3, b = -2, m = 2$. Răspunsuri corecte: B, C și E.

2. Pe mulțimea $G = (2, \infty) \setminus \{3\}$ se definește legea de compoziție $x \circ y = (x-2)^{\ln \sqrt[p]{y-2}} + 2$, cu $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$. Alegeți răspunsurile corecte:

A) Legea de compoziție este asociativă.
B) Legea de compoziție nu este comutativă.
C) Orice element din G este simetrizabil în raport cu legea definită.
D) Ecuația $\underbrace{x \circ x \circ ... \circ x}_{2p+1} = x$ are $2p+1$ soluții distincte în G.
E) Ecuația $\underbrace{x \circ x \circ ... \circ x}_{2020} = x$ are soluție unică $x \in G$.

Soluție: Avem $x \circ y = e^{\frac{1}{p}\ln(x-2)\ln(y-2)} + 2, \forall x, y \in G$. Se verifică prin calcul că legea este asociativă, comutativă și că orice element este simetrizabil în raport cu legea dată. Ecuația $\underbrace{x \circ x \circ ... \circ x}_{2p+1} = x$ este echivalentă cu

$$e^{\frac{1}{p^{2p}}(\ln(x-2))^{2p+1}} + 2 = x \Leftrightarrow \frac{1}{p^{2p}}(\ln(x-2))^{2p+1} = \ln(x-2) \Leftrightarrow (\ln(x-2))^{2p} = p^{2p} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x \in \{e^p + 2, e^{-p} + 2\}$, deci ecuația are două soluții distincte. Ecuația $\underbrace{x \circ x \circ ... \circ x}_{2020} = x$ este echivalentă cu $e^{\frac{1}{p^{2019}}(\ln(x-2))^{2020}}+2=x \Leftrightarrow (\ln(x-2))^{2019}=p^{2019} \Leftrightarrow x=2+e^{p}$. În concluzie, răspunsurile corecte sunt: A, C, E.

3. Fie $(G,\cdot)$ un grup în care sunt satisfăcute proprietățile:

i) $(xy)^2=(yx)^2, \forall x,y\in G$;

ii) $x^2\neq e, \forall x\in G\setminus\{e\}$ (*e* este elementul neutru al legii de compoziție). Alegeți răspunsurile corecte:

A) $x^2y^2=y^2x^2, \forall x,y\in G$.

B) $(xy)(yx)^{-1}=yx(xy)^{-1}, \forall x,y\in G$.

C) Există $x,y\in G, x\neq y$ astfel încât $x^{-1}y^{-1}=xy$.

D) $y(xy)^{-1}x=e, \forall x,y\in G$.

E) Grupul *G* poate avea 2022 elemente.

Soluție: a) Înlocuim y cu $x^{-1}y$ și obținem $y^2=\left(x^{-1}yx\right)^2 \Rightarrow xy^2=y^2x, \forall x,y\in G \Rightarrow y^2\in Z(G)$, deci $y^2x^2=x^2y^2, \forall x,y\in G$.

b) $(xy)(yx)^{-1}=yx(xy)^{-1} \Leftrightarrow xyx^{-1}y^{-1}=yxy^{-1}x^{-1} \Leftrightarrow (xy)^2x^{-1}y^{-1}=xy^2xy^{-1}x^{-1} \overset{ii)}{\Leftrightarrow}$
$yx=(xy)(yx)(xy)^{-1} \Leftrightarrow yx^2y=xy^2x$, adevărat.

c) $x^2\neq e \Leftrightarrow x\neq x^{-1}, \forall x\in G\setminus\{e\}$. Putem considera $y=x^{-1}\neq x$ pentru $x\neq e$.

d) Relația este adevărată, ea fiind echivalentă cu $(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1}$.

e) $G\setminus\{e\}=\bigcup\limits_{x\in G\setminus\{e\}}\left\{x,x^{-1}\right\}$, deci G nu poate avea un număr par de elemente.

Răspunsurile corecte sunt: A, B, C, D.

4. Se consideră funcția $f:(-\infty,0]\to\mathbb{R}$, definită prin $f(x)=\dfrac{3+(4\sin x+\cos x)e^x}{e^x\sin x+1}$ și *F* o primitivă a sa, care se anulează în $x=0$. Dacă $a=F(-\pi)$, atunci:

A) $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$	B) $a\in\mathbb{Q}$	C) $a<-9$	D) $a>-9$	E) $\dfrac{a}{\pi}\in\mathbb{Z}$

Soluție: Se obține $F(x)=4x+\ln\left(\sin x+e^{-x}\right) \Rightarrow F(-\pi)=-3\pi$, iar răspunsurile corecte sunt: A, C, E.

5. Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} a, x=0 \\ x^2\left[\dfrac{1}{x^2}\right], x>0\end{cases}, a\in\mathbb{R}$, unde $[b]$ reprezintă partea întreagă a numărului *b*. Notăm cu $I_n=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{n} f(x)dx, n\in\mathbb{N}^*$. Atunci:

A) Funcția *f* admite primitive pe intervalul $[0,\infty)$ pentru $a=1$.

B) Funcția *f* este integrabilă pe orice interval $[a,b]\subset(0,\infty)$.

C) Șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este șir strict crescător.

D) $I_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\sqrt{3}} + 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{8}$.

E) $I_n = \frac{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{18\sqrt{6}} + \frac{5}{24}$.

<u>Soluție</u>: Explicităm funcția și obținem $f(x) = \begin{cases} a, x=0 \\ \vdots \\ 2x^2, x \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ x^2, x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right] \\ 0, x>1 \end{cases}$. Funcția are discontinuități de specia I, deci nu admite primitive. Din criteriul lui Lebesgue deducem că *f* este integrabilă pe orice interval $[a,b] \subset (0,\infty)$. Apoi $I_{n+1} - I_n = \int_n^{n+1} f(x)dx = 0, \forall n \geq 1$, deci șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este constant. În continuare obținem:

$I_n = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} 3x^2 dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2x^2 dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} x^2 dx = ... = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\sqrt{3}} + 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{8} = \frac{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{18\sqrt{6}} + \frac{5}{24}$. Răspunsurile corecte sunt: B, D, E.

6. Considerăm șirurile $(I_n)_{n\geq 1}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^n(3x)dx$ și $(a_n)_{n\geq 3}, a_n = \left(\frac{I_n}{I_{n-2}}\right)^{3n}$. Dacă $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ atunci:

A) $L < \frac{1}{e^2}$	B) $L = 1$	C) $L > \frac{1}{e}$	D) $L = e^{-3}$	E) $L = 0$

<u>Soluție</u>: Scriem $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x)\cdot\sin^{n-1}(3x)dx = -\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos(3x))' \cdot \sin^{n-1}(3x)dx$ și folosind metoda integrării prin părți obținem $nI_n = (n-1)I_{n-2}$, de unde $a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{3n}$ și $\lim_{n\to\infty} a_n = e^{-3}$.
Răspunsurile corecte sunt: A și D.

7. Să se determine funcțiile $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ care admit o primitivă F cu proprietatea:

$$f(x) + \cos x \cdot F(x) = \frac{\sin 2x}{(1+\sin x)^2}, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

<u>Soluție</u>: Avem $\left(F(x)e^{\sin x}\right)' = e^{\sin x}\left(f(x) + F(x)\cos x\right) = \frac{e^{\sin x}\cdot \sin 2x}{(1+\sin x)^2}$ 10p

Pentru calculul $\int \frac{e^{\sin x} \cdot \sin 2x}{(1+\sin x)^2} dx$ folosim substituția $t=\sin x$ și reducem integrala la

$\int \frac{2te^t}{(1+t)^2} dt = \int \frac{(2t+2)e^t}{(1+t)^2} dt - \int \frac{2e^t}{(1+t)^2} dt = \int \frac{2e^t}{1+t} dt + 2\int \left(\frac{1}{1+t}\right)' e^t dt = \frac{2e^t}{1+t} + C$, deci

$\int \frac{e^{\sin x} \cdot \sin 2x}{(1+\sin x)^2} dx = \frac{2e^{\sin x}}{1+\sin x} + C$ 10p

Astfel $\left(F(x)e^{\sin x}\right)' = \left(\frac{2e^{\sin x}}{1+\sin x}\right)'$, de unde obținem

$F(x)e^{\sin x} = \frac{2e^{\sin x}}{1+\sin x} + a, a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow F(x) = \frac{2}{1+\sin x} + ae^{-\sin x}, a \in \mathbb{R}$

Funcțiile cerute sunt de forma $f(x) = \frac{-2\cos x}{(1+\sin x)^2} - ae^{\sin x} \cos x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 10p