Clasa a XI-a
Bareme

Problemele 1-6 sunt probleme tip grilă, ce conțin cinci răspunsuri posibile, iar numărul răspunsurilor corecte este cuprins între 1 și 5. Punctajul unei astfel de probleme poate fi:

- 0 puncte – dacă nu a fost dat niciun răspuns sau printre răspunsurile indicate există cel puțin unul incorect;
- 5 puncte – dacă toate răspunsurile indicate sunt corecte, dar lipsește cel puțin un răspuns corect;
- 10 puncte – dacă răspunsurile indicate coincid cu toate răspunsurile corecte ale problemei.

Pentru problema 7 se cere redactarea completă a soluției. Punctajul corespunzător acordat unei rezolvări corecte și complete este de 30 puncte.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

1. Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ o matrice pătratică al cărei determinant are valoarea 3, iar $\det(2A) = 24$. Dacă $a = \det(3A)$ atunci:

A) $a = 35$	B) $a \vdots 4$	C) $a \vdots 27$	D) $a < 80$	E) $a > 80$

Soluție: Cum $A \in M_n(\mathbb{C})$ rezultă $\det(\alpha A) = \alpha^n \cdot \det A$. Atunci $\det(2A) = 2^n \cdot \det A = 2^n \cdot 3$, de unde $2^n \cdot 3 = 24$, deci $n = 3$. Obținem $\det(3A) = 3^3 \cdot 3 = 81$. Răspunsuri corecte: C și E.

2. Fie triunghiul ABC, în care notăm cu a, b, c lungimile laturilor și cu A, B, C măsurile corespunzătoare ale unghiurilor sale, iar $\Delta = \begin{vmatrix} \sin A & \cos A & 1 \\ \sin B & \cos B & 1 \\ \sin C & \cos C & 1 \end{vmatrix}$. Alegeți răspunsurile corecte:

A) Dacă $a < b < c$ atunci $\Delta > 0$.
B) Dacă $a < c < b$ atunci $\Delta > 0$.
C) Dacă $b < c < a$ atunci $\Delta < 0$.
D) Dacă $c < b < a$ atunci $\Delta < 0$.
E) Dacă $\Delta = 0$ atunci triunghiul este isoscel.

Soluție: Scăzând prima linie din celelalte două și dezvoltând apoi după ultima coloană obținem:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin B - \sin A & \cos B - \cos A \\ \sin C - \sin A & \cos C - \cos A \end{vmatrix}.$$

Cum $\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$ și $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2}$ deducem că:

$$\Delta = 4\sin\frac{B-A}{2}\sin\frac{C-A}{2}\begin{vmatrix}\cos\frac{B+A}{2} & -\sin\frac{B+A}{2}\\ \cos\frac{C+A}{2} & -\sin\frac{C+A}{2}\end{vmatrix}.$$

Dezvoltând apoi determinantul de ordin doi și folosind că $\sin x\cos y - \cos x\sin y = \sin(x-y)$, adică $\sin\frac{B+A}{2}\cos\frac{C+A}{2} - \cos\frac{B+A}{2}\sin\frac{C+A}{2} = \sin\frac{B-C}{2}$, obținem $\Delta = 4\sin\frac{B-A}{2}\sin\frac{C-A}{2}\sin\frac{B-C}{2}$. Cum $\frac{B-A}{2},\frac{C-A}{2},\frac{B-C}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, iar ordinea unghiurilor este dată de ordinea laturilor, atunci răspunsurile corecte sunt: B, C, E.

3. Fie $a = \alpha^{-1}(3)$, unde $\alpha = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $b = \beta^{2021}(1)$, unde $\beta = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1\end{pmatrix}$, c este numărul permutărilor $\gamma \in S_5$, cu proprietatea $\gamma(1)\cdot\gamma(3) = 4$ și $s = a+b+c$. Atunci:

A) $s \vdots 4$	B) $s \vdots 7$	C) $s \le 20$	D) $s > 20$	E) $\alpha^s = \alpha$

<u>**Soluție:**</u> Evident $a = \alpha^{-1}(3) = 4$, ordinul permutării β este 6, deci $b = \beta^{2021}(1) = \beta^{-1}(1) = 5$, iar pentru permutarea γ putem avea $\gamma(1) = 1, \gamma(3) = 4$ sau $\gamma(1) = 4, \gamma(3) = 1$. În fiecare caz avem câte $P_3 = 3! = 6$ permutări, deci $c = 12$. Obținem $s = 21$. Cum ordinul permutării α este 4 deducem că $\alpha^s = \alpha$, iar răspunsurile corecte sunt: B, D, E.

4. Pentru fiecare $x \in \mathbb{R}$ definim matricea $A(x) = \begin{pmatrix}\cos 2\pi x & -\sin 2\pi x\\ \sin 2\pi x & \cos 2\pi x\end{pmatrix}$. Atunci:

A) $A\left(\frac{1}{6}\right)^4 \in M_2(\mathbb{Q})$.

B) Există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A\left(\frac{1}{6}\right)^n = I_2$.

C) $A\left(\sqrt{2}\right)^n \ne \mathrm{I}_2, \forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}^*$.

D) Cel mai mic număr natural nenul *n* pentru care $A\left(\frac{1}{6}\right)^n = I_2$ este 6.

E) Cel mai mic număr natural nenul *n* pentru care $A\left(\frac{1}{6}\right)^n \in M_2(\mathbb{Q})$ este 6.

<u>**Soluție:**</u> Se cunoaște (și se poate demonstra prin inducție) că dacă $X = \begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$, atunci $X^n = \begin{pmatrix}\cos nt & -\sin nt\\ \sin nt & \cos nt\end{pmatrix}$. Atunci $A\left(\frac{1}{6}\right)^n = \begin{pmatrix}\cos\frac{n\pi}{3} & -\sin\frac{n\pi}{3}\\ \sin\frac{n\pi}{3} & \cos\frac{n\pi}{3}\end{pmatrix}$, de unde deducem că

$A\left(\frac{1}{6}\right)^n \in M_2(\mathbb{Q})$ dacă și numai dacă $n=3k,$ iar $A\left(\frac{1}{6}\right)^{3k}=(-1)^k I_2.$ În plus, $A(x)^n=I_2$ dacă și numai dacă $\cos 2n\pi x=1 \Leftrightarrow x=\frac{m}{n}, m\in\mathbb{Z}.$ Răspunsurile corecte sunt: B, C, D.

5. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $x_n \in (0,2), \forall n\in\mathbb{N}^*$ și $x_{n+1}(2-x_n)\geq 1, \forall n\in\mathbb{N}^*.$ Atunci:

A) Șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ are un număr finit de termeni în intervalul $\left(0,\frac{2}{3}\right)$.

B) Șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ are un număr finit de termeni în intervalul $\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$.

C) Șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ are un număr finit de termeni în intervalul $\left(\frac{4}{3},2\right)$.

D) $(x_n)_{n\geq 1}$ este șir descrescător.

E) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ este număr natural impar.

<u>**Soluție**</u>: Cum x_{n+1} și $2-x_n$ sunt numere pozitive putem aplica inegalitatea mediilor: $1\leq\sqrt{x_{n+1}(2-x_n)}\leq\frac{x_{n+1}+2-x_n}{2}$, de unde $x_{n+1}>x_n, \forall\, \mathrm{n}\geq 1,$ deci șirul este monoton, fiind strict crescător. Combinat cu faptul că este și mărginit, deducem că este convergent. Fie $l=\lim\limits_{n\to\infty} x_n\in[0,2]$. Trecând la limită în inegalitatea din ipoteză rezultă $l(2-l)\geq 1,$ de unde $(l-1)^2\leq 0 \Leftrightarrow l=1.$ Răspunsurile corecte sunt: A, C, E.

6. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $x_n=\operatorname{tg} n, \forall n\in\mathbb{N}^*.$ Atunci:

A) Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*,$ intervalul $\left(n\pi-\frac{\pi}{2}+1, n\pi+\frac{\pi}{2}-1\right)$ conține cel puțin un număr natural.

B) Șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ are cel puțin un subșir mărginit.

C) Șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ nu are niciun subșir convergent.

D) Șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ nu are limită.

E) Șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

<u>**Soluție**</u>: Cum $\left(n\pi+\frac{\pi}{2}-1\right)-\left(n\pi-\frac{\pi}{2}+1\right)=\pi-2>1,$ deducem că intervalul $\left(n\pi-\frac{\pi}{2}+1, n\pi+\frac{\pi}{2}-1\right)$ conține cel puțin un număr natural. Fie $k_n\in\left(n\pi-\frac{\pi}{2}+1, n\pi+\frac{\pi}{2}-1\right)\cap\mathbb{N}^*$. Evident $k_n\in\left(n\pi-\frac{\pi}{2}, n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$, de unde $k_n<k_{n+1}$ și $\left(x_{k_n}\right)_{n\geq 1}$ este subșir al șirului $(x_n)_{n\geq 1}$. Ținând cont că funcția $\operatorname{tg} x$ este strict crescătoare pe intervalul $\left(n\pi-\frac{\pi}{2}, n\pi+\frac{\pi}{2}\right),$ deducem că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ au loc inegalitățile:

$-\operatorname{ctg}1=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}+1\right)=\operatorname{tg}\left(n\pi-\frac{\pi}{2}+1\right)<\operatorname{tg}k_n<\operatorname{tg}\left(n\pi+\frac{\pi}{2}-1\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=\operatorname{ctg}1,$ adică subşirul $\left(x_{k_n}\right)_{n\geq 1}$ este mărginit. Conform lemei lui Cesaro, el conține un subşir convergent, care este şi subşir al lui $\left(x_n\right)_{n\geq 1}$. În mod analog putem arăta că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ există numerele naturale $h_n\in\left(n\pi-\frac{\pi}{2},n\pi-\frac{\pi}{2}+1\right)$ şi $l_n\in\left(n\pi+\frac{\pi}{2}-1,n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$, de unde deducem că $\operatorname{tg}h_n<\operatorname{tg}\left(n\pi-\frac{\pi}{2}+1\right)=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}+1\right)=-\operatorname{ctg}1,\ \operatorname{ctg}1=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=\operatorname{tg}\left(n\pi+\frac{\pi}{2}-1\right)<\operatorname{tg}l_n,$ deci subşirurile $\left(x_{h_n}\right)_{n\geq 1}$ şi $\left(x_{l_n}\right)_{n\geq 1}$ nu pot avea aceeaşi limită (în cazul în care fiecare din ele ar avea limită). Deci şirul $\left(x_n\right)_{n\geq 1}$ nu are limită. Răspunsurile corecte sunt: A, B, D.

7. Fie şirul $\left(x_n\right)_{n\geq 1}$ definit prin: x_n este cel mai mic număr natural *k* cu proprietatea că $k!$ e divizibil la $n,$ iar $\left(y_n\right)_{n\geq 1}$ este definit prin $y_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{k}\right)^k-\pi(n),$ unde $\pi(n)$ este egal cu numărul numerelor prime mai mici sau egale cu *n*. Arătați că şirul $\left(y_n\right)_{n\geq 1}$ este convergent şi limita sa se află situată în intervalul $[2,3]$.

<u>**Soluție**</u>: Pentru a înțelege cum se formează termenii şirului $\left(x_n\right)_{n\geq 1}$ vom scrie primii termeni: $x_1=1,x_2=2,x_3=3,x_4=4,x_5=5,x_6=3.$ Să observăm întâi că dacă *p* este număr prim, atunci $x_p=p$ şi $\frac{x_p}{p}=1$. Atunci $y_n=\sum_{k=1,k\neq\text{prim}}^{n}\left(\frac{x_k}{k}\right)^k$. Să observăm că $y_1=y_2=y_3=1,y_4=y_5=2$ şi că $y_{n+1}=y_n,$ dacă $n+1$ este număr prim, respectiv $y_{n+1}>y_n,$ dacă $n+1$ nu este număr prim. În concluzie, şirul $\left(y_n\right)_{n\geq 1}$ este crescător, deci are limită. Vom arăta în continuare că $\frac{x_k}{k}\leq\frac{2}{3},$ pentru orice $k\geq 6$ care nu este număr prim. Considerăm următoarele cazuri:

1) *k* are cel puțin doi divizori primi distincți
   În acest caz, putem scrie $k=pq,$ unde p şi q sunt numere naturale distincte, prime între ele, mai mari sau egale cu 2. Putem presupune $2\leq p<q.$ Atunci $p/p!/q!$ şi cum $q/q!,$ iar $(p,q)=1,$ rezultă că $k=pq/q!,$ de unde $x_k\leq q.$ Găsim $\frac{x_k}{k}\leq\frac{q}{pq}=\frac{1}{p}\leq\frac{1}{2}.$

2) $k=p^s,s\geq 3$ şi $p\geq 2$ număr prim
   Atunci $k=p^s/p^1\cdot p^2\cdot\ldots\cdot p^{s-1}/\left(p^{s-1}\right)!,$ deci $x_k\leq p^{s-1},$ iar $\frac{x_k}{k}\leq\frac{p^{s-1}}{p^s}=\frac{1}{p}\leq\frac{1}{2}.$

3) $k=p^2$ şi $p\geq 3$ număr prim
   Evident $k=p^2/p\cdot 2p/(2p)!,$ deci $a_k\leq 2p$, iar $\frac{x_k}{k}\leq\frac{2p}{p^2}=\frac{2}{p}\leq\frac{2}{3}.$

Astfel, pentru $n\geq 6$ avem

$y_n=\left(\frac{x_1}{1}\right)^1+\left(\frac{x_4}{4}\right)^4+\sum_{k=6,k\neq\text{prim}}^{n}\left(\frac{x_k}{k}\right)^k\leq 1+1+\sum_{k=6,k\neq\text{prim}}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k\leq 1+1+\sum_{k=6}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k\leq\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k$. Dar

$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}=\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}=3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)<3,$ deci $2\le y_n<3, \forall n\ge 6.$ Atunci șirul $\left(y_n\right)_{n\ge 1}$ este monoton și mărginit, deci este convergent, iar $\lim_{n\to\infty} y_n \in \left[2,3\right].$