



Infinity

Concurs de
matematică și gândire logică



Concursul județean de matematică și gândire logică „Infinity”

Prima ediție, 18 – 19 decembrie 2021

Barem de corectare clasa a IV-a

1. Răspuns: $a = 4$

Există 6 numere distincte de 3 cifre, naturale nenule, care se pot forma cu cifrele 2, 5 și a (1p)

Acestea sunt:

$$\overline{a25} = 100a + 25 = 100a + 20 + 5$$

$$\overline{a52} = 100a + 52 = 100a + 50 + 2$$

$$\overline{2a5} = 10a + 205 = 10a + 200 + 5$$

$$\overline{5a2} = 10a + 502 = 10a + 500 + 2$$

$$\overline{25a} = a + 250 = a + 200 + 50$$

$$\overline{52a} = a + 520 = a + 500 + 20 \dots\dots\dots(3p)$$

Adunându-le, obținem că suma cerută este :

$$S = 2(100a + 10a + a) + 2((2 + 5) \cdot 100 + (2 + 5) \cdot 10 + 2 + 5)$$

$$S = 222a + 2 \cdot 777 = 222a + 1554 \dots\dots\dots(2p)$$

$$S = 222a + 1554 = 2442 \Rightarrow 222a = 888 \Rightarrow a = 4 \dots\dots\dots(1p)$$

2. a) Presupunem că se poate scrie numărul 189 ca sumă de 19 numere naturale nenule diferite. Primele 19 numere naturale nenule distincte sunt 1, 2, 3, ..., 19. Suma acestora este $1 + 2 + \dots + 19 = \frac{19 \cdot 20}{2} = 190 \dots\dots\dots(2p)$

Oricum am alege 19 numere naturale nenule distincte, suma lor va fi mai mare sau egală decât 190. Cum $190 > 189$, nu putem scrie numărul 189 ca sumă de 19 numere naturale nenule diferite $\dots\dots\dots(1.5p)$

- b) Să observăm că numerele de pe prima linie: 1, 3, 6, 10, 15, ... sunt egale cu $1, 1 + 2, 1 + 2 + 3, 1 + 2 + 3 + 4, 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \dots$

Deducem că al n -lea număr al primei linii este $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \dots\dots\dots(2p)$

Observăm că termenul de pe linia 1, coloana n este egal cu termenul de pe linia a , coloana $n - a + 1$ adunat cu $a - 1$, cu $a \leq n \dots\dots\dots(0.5p)$



Infinity

Concurs de
matematică și gândire logică



Fie a și b numărul liniei, respectiv coloanei pe care este scris numărul 2002. Deoarece $\frac{62 \cdot 63}{2} = 1953 < 2002 < \frac{63 \cdot 64}{2} = 2016 \Rightarrow a + b = 64$. În plus, $a = 2016 - 2002 + 1 = 15$ și deci $b = 64 - 15 = 49$. Deci 2002 se află pe linia 15, coloana 49(1p)

3.

a) Sunt 4 nr de o singura cifră. O cifra $\cdot$ 4 numere=4 cifre

45 de numere de 2 cifre rezultă 2 cifre $\cdot$ 45 de numere=90 cifre

450 numere de 3 cifre rezultă 3 cifre $\cdot$ 450 de numere=1350 cifre

512 numere de 4 cifre rezultă 4cifre $\cdot$ 512 de numere=2048 cifre....(2p)

În total sunt $4+90+1350+2048=3492$ cifre..... (1p)

b) Pe poziția cifrei unităților cifra 4 se folosește de 202 ori, în scrierea numerelor: 4, 14, 24...104, 114,...2004,2014..... (1p)

Pe poziția cifrei zecilor cifra 4 se folosește de 100 de ori, în scrierea numerelor: 40, 42, 44,46, 48,140...240...1940,1942,1946,1948..... (1p)

Pe poziția cifrei sutelor cifra 4 se folosește de 100 de ori, în scrierea numerelor: 400,402,404...1400,1402...1498..... (1p)

Se vor folosi în total $202+100+100=402$ cifre de 4 în scrierea numărului n(1p)

Problema specială

Împărțim cele 25 de monede în 3 grămezi de 8, 8 și 9 monede. Pentru primul pas luăm primele două grămezi și le punem pe câte un taler al balanței (8 pe un taler, 8 pe un taler). Distingem 2 cazuri A și B.

Cazul A: Balanța este echilibrată, atunci moneda falsă este în grămada rămasă, de 9. Acum împărțim grămada de 9 în 3 grămezi de câte 3, 3 și 3. Luăm primele două grămezi și le punem pe câte un taler al balanței. Avem două cazuri A1 și A2.

Cazul A1: Balanța este echilibrată, atunci moneda este în grămada de câte 3 care nu a fost cântărită. Împărțim grămada de 3 rămasă în 1,1 și 1. Comparăm prima monedă cu a doua și dacă sunt egale, atunci a treia monedă este falsă. Dacă nu, atunci moneda falsă este cea de pe talerul care este mai sus(moneda falsă este mai ușoară).

Cazul A2: Balanța nu este echilibrată deci moneda falsă este în grămada de pe talerul mai ridicat. Luăm această grămadă și o împărțim în 1,1 și 1. Comparăm prima monedă cu a doua și dacă sunt egale, atunci a treia monedă este falsă. Dacă nu, atunci moneda falsă este cea de pe talerul care este mai sus(moneda falsă este mai ușoară).



Infinity

Concurs de
matematică și gândire logică



Cazul B: Balanța nu este echilibrată deci moneda falsă este în grămada de pe talerul mai ridicat. Analog împărțim cele 8 monede în grămezi de câte 2,3,3 și comparăm grămezile de câte 3. Avem 2 cazuri B1 și B2

Cazul B1: Balanța este echilibrată, atunci moneda este în grămada de câte 2 monede care nu a fost cântărită. Comparăm cele 2 monede rămase și aflăm moneda falsă.

Cazul B2: Balanța nu este echilibrată deci moneda falsă este în grămada de pe talerul mai ridicat. Luăm această grămadă și o împărțim în 1,1 și 1. Comparăm prima monedă cu a doua și dacă sunt egale, atunci a treia monedă este falsă. Dacă nu, atunci moneda falsă este cea de pe talerul care este mai sus(moneda falsă este mai ușoară).

Notă: Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.



Infinity

Concurs de
matematică și gândire logică



Concursul județean de matematică și gândire logică „Infinity”

Prima ediție, 18 – 19 decembrie 2021

Barem de corectare clasa a V-a

1. a) Observăm că $B = p + p^5$ este număr par. Singurul număr prim par este 2(1p)

Pentru $B=2$, p se determină în mod unic ca fiind soluția ecuației $2 = p + p^5$, adică $p=1$. Pentru $p=1$, $A=3$, A nr. prim. Deci $p=1$ este soluție unică (1p)

Observație: Se acordă 1p pentru determinarea soluției $p=1$, fără demonstrarea unicității

b) Observăm că $\forall n \in \mathbb{N}$, nr. nedivizibil cu 5, $n^4 = M_5 + 1$ ($n = M_5 + r$, $r \in \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow n^4 = M_5 + r^4$ și $r^4 \in \{1^4, 2^4, 3^4, 4^4\} = \{1, 16, 81, 256\} \subset M_5 + 1$).....(0.5p)

Observăm că $\forall m \in \mathbb{N}$ și $\forall n \in \mathbb{N}$, n nr nedivizibil cu 5, $n^{4m} = M_5 + 1$ ($n^{4m} = (n^4)^m = (M_5 + 1)^m = M_5 + 1$)(0.5p)

Folosind aceste considerente C este $(M_5 + 1) \cdot 6 + M_5 + 1 + (M_5 + 1) \cdot 2 + 1 = M_5 + 10 = M_5$ (0.5p)

Deci $5 \mid C$. Cum singurul nr. prim divizibil cu 5 este 5 rezultă $C=5$. Fals deoarece $p \geq 1$, deci $C \geq 10$. Așadar nu există nr. nat. p nedivizibil cu 5 astfel încât C prim..... (0.5p)

c) Dacă p și q ar avea aceeași paritate atunci $p + 9p^2 + 9pq + q^3$ ar fi nr. par. Dar 5257 nr. impar deci fals.....(0.5p)

Așadar cele două nr. p și q au parități diferite(0.5p) Unul dintre ele este par.

Cazul 1: $p=\text{par}$. Cum singurul nr. par este 2 rezultă $p=2$. Ecuația devine $2 + 9 \cdot 4 + 18q + q^3 = 5257$ deci $q(q^2 + 18) = 5219 = 17 \cdot 307$. Cum 17 și 307 sunt nr. prime rezultă $q \in \{17, 307\}$. Cum $q < q^2 + 18 \Rightarrow q=17$ deci avem soluția $(p, q) = (2, 17)$ (1p)

Cazul 2: $q=\text{par}$ analog $q=2$. Ecuația devine $p + 9p^2 + 18p + 8 = 5257$. În acest caz nu avem soluții deoarece p fiind impar $p + 9p^2 + 18p + 8$ este nr. par, iar 5257 nr. impar.

Deci soluția unică $(p, q) = (2, 17)$ (1p)

2. a) Sunt 9^5 numere formate cu 5 cifre naturale nenule (fiecare cifră ia valori din mulțimea $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$)(1p)

Sunt 5^5 numere formate cu 5 cifre naturale nenule doar impare (fiecare cifră ia valori din mulțimea $\{1, 3, 5, 7, 9\}$)(1p)

Prin diferență, sunt $9^5 - 5^5 = 55924$ numere formate 5 cifre nenule, dintre care cel puțin una este pară(0.5p)

(Un produs de cifre e par dacă cel puțin o cifră e pară)(0.5p)



Infinity

Concurs de
matematică și gândire logică



b) Observăm că diferența a 2 numere se divide cu 11 dacă ele dau același rest la împărțirea cu 11.(1p)

Presupunem prin reducere la absurd că numărul maxim de numere dintre cele 122, care dau același rest la împărțirea cu 11 este mai mic sau egal 11(1p)

Avem 11 resturi posibile la împărțirea cu 11. Acestea sunt $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$ (1p)

Atunci în mulțime avem maxim $11 \cdot 11 = 121$ de numere fals, sunt 122! Deci presupunerea făcută este greșită(1p)

În concluzie, putem alege $11 + 1 = 12$ numere astfel încât diferența lor să se dividă cu 11.

3. Răspuns: nu, nu există(1p)

Argumentare: Presupunem prin reducere la absurd că ar exista $x, y \in \mathbb{N}$ astfel încât $x^4 + y^4 = 2020^{2021} + 3$. Atunci $uc(x^4 + y^4) = uc(2020^{2021} + 3)$, unde am notat $uc(t)$ ultima cifră a numărului natural t .

Dar $uc(2020^{2021} + 3) = 3$, deoarece $uc(2020^{2021}) = 0$,(2p)

Iar $uc(x^4 + y^4) \neq 3$, pentru orice numere x, y naturale

Justificare: $uc(1^4) = 1$, $uc(2^4) = 6$, $uc(3^4) = 1$, $uc(4^4) = 6$, $uc(5^4) = 5$, $uc(6^4) = 6$, $uc(7^4) = 1$, $uc(8^4) = 6$, $uc(9^4) = 1$, $uc(0^4) = 0$, deci $uc(a^4) \in \{0, 1, 5, 6\}, \forall a \in \mathbb{N}$.(3p)

De aici, $uc(a^4 + b^4) \in \{1, 5, 6, 7\}, \forall a, b \in \mathbb{N}$ (1p)

Deci $uc(a^4 + b^4) \neq 3$, de unde ecuația nu are soluții în mulțimea numerelor naturale.

Problema specială

Observăm că dacă toate semnele ar fi plus, calculul ar da $1+2+\dots+9999 = \frac{9999 \cdot 10000}{2} = 9999 \cdot 5000$

Care este număr par.

Observăm că pentru o transformare a semnului plus în minus, să zicem fără a restrânge generalitatea din fața termenului x , valoarea calcului scade cu $2x$, deci paritatea valorii calculului nu se modifică.

Așadar indiferent de alegerea semnelor plus și minus, rezultatul va fi un număr par.

Cum 9999 este număr impar, atunci este imposibilă o alegere a semnelor plus și minus astfel încât rezultatul calculului să fie 9999.

Notă: Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.



Infinity

Concurs de
matematică și gândire logică



Concursul județean de matematică și gândire logică „Infinity”

Prima ediție, 18 – 19 decembrie 2021

Barem de corectare clasa a VI-a

1. a) Din $19x+14y=5z$ obținem $19x+19y=5z+5y$ Deci $19(x+y)=5(y+z)$ (0.5p)
Cum 5 și 19 sunt numere prime între ele rezultă ca $19|(y+z)$ (1p)
și $5|(x+y)$(1p)

La fel, din $19x+14y=5z$ obținem $14x+14y=5z-5x$. Adică $14(x+y)=5(z-x)$. Observăm $14(x+y)$ că e par deci și $5(z-x)$ e par deci z și x au aceeași paritate. Asta înseamnă $2|(x+z)$(1p)

2, 5 și 19 sunt prime între ele deci din cele 3 relații rezultă că $(x+y)(y+z)(z+x)$ divizibil cu $2 \cdot 5 \cdot 19 = 190$(0.5p)

b) Fie k valoarea maximă pe care o poate lua n astfel încât $(k+19)(k+8) < 2021$.

De asemenea observăm $(0+19)(0+8) < (1+19)(1+8) < (2+19)(2+8) < \dots < (k+19)(k+8) < 2021$

Adică $152 < 180 < 210 < \dots < (k+19)(k+8) < 2021$(1p)

Dar $50 \cdot 39 = 1950$ adică $(31+19)(31+8) = 1950$ și $51 \cdot 40 = 2040$. Adică $(32+19)(32+8) = 2040$.

Deci dacă $k \geq 32$ atunci $(k+19)(k+8) \geq 2040 > 2021$. Atunci k poate fi maxim 31..... (1p)

Așadar n poate lua valori din mulțimea $\{0, 1, 2, \dots, 31\}$ adică 32 de valori naturale astfel încât $(n+19)(n+8) < 2021$ (1p)

2. a. Numărul $C = 2^{2021} \cdot 5^{2021}$ este egal cu $10^{1921} \cdot 2^{100}$. Numărul de cifre al numărului C este 1921 plus numărul de cifre ale lui 2^{100} (2p)

Pentru a calcula numărul de cifre ale lui 2^{100} , vom demonstra $10^{30} < 2^{100} < 10^{31}$

Prima parte: $10^{30} < 2^{100}$ vom folosi $2^{10} > 10^3$ ($1024 > 1000$), deci $2^{100} > 10^{30}$ (1.5p)

Pentru a doua parte: $2^{100} < 10^{31}$, $2^{100} < 10^{31} \Leftrightarrow 2^{69} < 5^{31}$ Cum $2^9 < 5^4$ ($512 < 625$)

Rămâne de arătat $2^{60} < 5^{27} \Leftrightarrow (2^{20})^3 < (5^9)^3 \Leftrightarrow 2^{20} < 5^9$. Cum $2^2 < 5^1$ ($4 < 5$) rămâne de arătat $2^{18} < 5^8 \Leftrightarrow (2^9)^2 < (5^4)^2 \Leftrightarrow 2^9 < 5^4 \Leftrightarrow 512 < 625$, adevărat. Deci

$10^{30} < 2^{100} < 10^{31}$, atunci 2^{100} are 31 de cifre. Deci C are $1921 + 31 = 1952$ cifre (1.5p)

b. Pentru început, $2^{2022} \cdot 5^{1922} = 10^{1922} \cdot 2^{100}$, analog punctului a) $2^{2022} \cdot 5^{1922}$ are $1922 + 31 = 1953$ cifre Acum $7^{11} \cdot 17^5$ are mai puțin de 17 cifre.....(1p)



Infinity

Concurs de
matematică și gândire logică



Cum $2^{2022} \cdot 5^{1922}$ are 1922 cifre de 0 la final, numărul $7^{11} \cdot 17^5$ cu mai puțin de 17 cifre nu influențează numărul total de cifre ale lui E . Așadar E are 1953 cifre(1p)

3.

- a) Suma unghiurilor în jurul punctului O este $n + (n+k) + (n+2k) + (n+3k) + (n+4k) + (n+5k) = 360$ (1p)
Deci $6n+15k=360$, adică $2n+5k=120$. $m(\angle BOF)=2n+5k = 120$ (1p)
- b) Dacă $[OC]$ ar fi bisectoarea $\angle AOD$, atunci $m(\angle AOC)=m(\angle COD)$. Adică $2n+k=n+2k$ de unde rezultă $n=k$ (1p)
Acest lucru este fals, deoarece $k < n$(1p)
- c) $m(\angle BOE)=171$ deci $3n+6k=171$ de unde rezultă $n+2k=57$ (1p)
Deci $2n+4k=114$ și știind $2n+5k=120$ avem $k=6$ și deci $n=45$(2p)

Problema specială

Să observăm că următoarele pătrate perfecte mai mari ca 16 sunt $25 = 16 + 9$ și apoi $36 = 16 + 20$. Într-o aranjare circulară, numerele vecine lui 16 ar trebui să fie 9 și 20, ceea ce nu este posibil.

Notă: Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.



Concursul județean de matematică și gândire logică „Infinity”

Prima ediție, 18 – 19 decembrie 2021

Barem de corectare clasa a VII-a

1. a. Notăm $\angle BAD = 2x$ și atunci $\angle DAF = 90^\circ - x$. Cum triunghiul ADF este isoscel rezultă $\angle DFA = \frac{180^\circ - 90^\circ + 2x}{2} = 45^\circ + x$ și deci $\angle BFD = x$.

Atunci $\angle BFD + \angle DFE = 45^\circ$(1p)

Din $DC \parallel AB \parallel EF$ și $DC = AB = EF$ rezultă $CDFE$ este paralelogram și deci $\angle DCE = \angle DFE$(1p)

Pe de altă parte $\angle ACD = \angle CAD = x$. Cum $\angle BFD + \angle DFE = \angle ACD + \angle DCE = \angle ACE$ obținem $\angle ACE = 45^\circ$(1p)

- b. Notăm cu $\{G\} = DC \cap BE$. $BE \perp AB$ și $AB \parallel CD$ implică $BE \perp CD$.
.....(0,5p).

Din $AC = 2BD$ obținem $OC = 2OD$ și atunci $CD = OD\sqrt{5}$ (Teorema lui Pitagora în $\triangle DOC$).....(1p)

Acum $\triangle DOC \sim \triangle DGB$ (sunt triunghiuri dreptunghice și au unghiul D comun). De aici $\frac{CO}{BG} = \frac{CD}{BD}$, adică $\frac{2AD}{BG} = \frac{OD\sqrt{5}}{2OD}$, de unde $BG = \frac{4OD\sqrt{5}}{5}$(1p)

Cum $BE = AB = CD = OD\sqrt{5}$, obținem $GE = \frac{OD\sqrt{5}}{5}$. Avem $\mathcal{A}_{ABCD} = CD \cdot BG = 4OD^2$ și $\mathcal{A}_{DCEF} = CD \cdot EG = OD^2$, de unde $\mathcal{A}_{ABCD} = 4 \cdot \mathcal{A}_{ECDF}$ (1,5p)

2. Dacă p este nr. prim > 3 să se arate $7^p - 6^p - 1 : 43$

Dacă p este un număr prim > 3 atunci p are una din formele $6k + 1$ și $6k + 5$. (În caz contrar dacă p ar fi de forma $6k$, $6k + 2$, $6k + 4$ atunci $2 \mid p$, iar dacă ar fi de forma $6k + 3$ atunci $3 \mid p$, cum p este prim nu se poate ca $p : 2$ sau $p : 3$)(1p)

Observă că $7^3 = 343 = 43 \cdot 8 - 1$ și $6^3 = 5 \cdot 43 + 1$, adică $7^3 = \mathcal{M}_{43} - 1$ și $6^3 = \mathcal{M}_{43} - 1$ (1p)

Cazul 1: $p = 6k + 1, k \in \mathbb{N}^*$

$$7^p = 7^{6k+1} = 7^{6k} \cdot 7 = (7^3)^{2k} \cdot 7 = (\mathcal{M}_{43} - 1)^{2k} \cdot 7 = (\mathcal{M}_{43} + 1) \cdot 7 = \mathcal{M}_{43} + 7$$



Iar

$$6^p = 6^{6k+1} = 6^{6k} \cdot 6 = (6^3)^{2k} \cdot 6 = (\mathcal{M}_{43} + 1)^{2k} \cdot 6 = (\mathcal{M}_{43} + 1) \cdot 6 = \mathcal{M}_{43} + 6$$

Deci $7^p - 6^p - 1 = \mathcal{M}_{43} + 7 - \mathcal{M}_{43} - 6 - 1 = \mathcal{M}_{43}$ Așadar, pentru

$$p = 6k + 1, 43 | 7^p - 6^p - 1 \dots\dots\dots(2p)$$

Cazul 2: $p = 6k + 5, k \in \mathbb{N}$

$$7^p = 7^{6k+5} = 7^{6k+3} \cdot 7^2 = (7^3)^{2k+1} \cdot 49 = (\mathcal{M}_{43} - 1)^{2k+1} \cdot 49 = (\mathcal{M}_{43} - 1) \cdot 49 = \mathcal{M}_{43} - 49 = \mathcal{M}_{43} - 6$$

$$6^p = 6^{6k+5} = 6^{6k+3} \cdot 6^2 = (6^3)^{2k+1} \cdot 36 = (\mathcal{M}_{43} + 1)^{2k+1} \cdot 36 = \mathcal{M}_{43} + 36$$

Deci $7^p - 6^p - 1 = \mathcal{M}_{43} - 6 - \mathcal{M}_{43} - 36 - 1 = \mathcal{M}_{43}$ Așadar și pentru

$$p = 6k + 5, 43 | 7^p - 6^p - 1 \text{ În concluzie, pentru orice număr prim } p, \\ 43 | 7^p - 6^p - 1 \dots\dots\dots(3p)$$

3.

a) Înmulțim $0 < x < 1$ cu $x \Rightarrow 0 < x^2 < x \Rightarrow 0 < |x| < \sqrt{x}$, dar $|x| = x$ ptr. $x > 0 \Rightarrow x < \sqrt{x}$ (1).....(2p)

Din $0 < x < 1$ rezultă $\sqrt{0} < \sqrt{x} < \sqrt{1}$ rezultă $\sqrt{x} < 1$ (2). Din (1) și (2) avem $x < \sqrt{x} < 1$..(1p)

b) Se consideră $x = 0, \underbrace{99\dots9}_{\text{de 2021 ori}}$ și se utilizează inegalitatea de la punctul precedent, deci

$\sqrt{x}$ are primele 2021 zecimale egale cu 9 și atunci suma lor este 18189.....(2p)

c) din b) rezultă $0, \underbrace{99\dots9}_{\text{de 2021 ori } 9} < \sqrt{0, \underbrace{99\dots9}_{\text{de 2021 ori}}} < 1$, de unde înmulțind cu $\frac{2}{3}$, rezultă

$0, \underbrace{66\dots6}_{\text{de 2021 ori } 6} < \sqrt{0, \underbrace{44\dots4}_{\text{de 2021 ori}}} < 0, (6)$, deci suma căutată este $6 \cdot 2021 = 12126$(2p)

Problema specială

Este evident că există două vârfuri consecutive de aceeași culoare; notând $A_1, A_2, \dots, A_7$ vârfurile heptagonului, fie A_1, A_2 vârfurile de aceeași culoare. Fără să restrângem generalitatea, să presupunem că această culoare este albastru. Dacă A_3 este colorat albastru, cum $A_1 A_2 = A_2 A_3$, problema se încheie. Prin urmare, să presupunem că A_3 (și analog A_7) este colorat cu roșu.



Infinity

Concurs de
matematică și gândire logică



Considerăm că A_4 este colorat cu roșu; atunci $A_7A_3 = A_7A_4$ și cerința este satisfăcută.

Deci A_4 (și analog A_6) sunt colorate cu albastru. În acest moment dacă A_5 este colorat cu roșu avem triunghiul $A_5A_3A_7$, iar dacă A_5 este colorat cu roșu avem triunghiul $A_5A_4A_6$. Cum ambele sunt isoscele, rezultă concluzia.

Notă: Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.



Infinity

Concurs de
matematică și gândire logică



Concursul județean de matematică și gândire logică „Infinity”

Prima ediție, 18 – 19 decembrie 2021

Barem de corectare clasa a VIII-a

1. Pentru început se observă că $xyz \neq 0$ (În caz contrar, dacă $xyz = 0$, atunci din $\frac{xyz}{y+z} = 1$, ar rezulta $0 = 1$, imposibil). Deci $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ (0.5p)

Apoi, relațiile inițiale sunt echivalente cu: $\frac{x+y}{xyz} = -1$, $\frac{y+z}{xyz} = 1$ și $\frac{z+x}{xyz} = \frac{1}{a}$ Adică

$\frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} = -1$ (1), $\frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} = 1$ (2) și $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} = \frac{1}{a}$ (3). Adunând cele 3 inegalități se obține: $2\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right) = -1 + 1 + \frac{1}{a} : \frac{1}{a}$. Deci $\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right) = \frac{1}{2a}$ (4).....(2p)

Din (1) și (4) rezultă $\frac{1}{xy} = \frac{1}{2a} + 1$, din (2) și (4) rezultă $\frac{1}{yz} = \frac{1}{2a} - 1$, iar din (3) și (4)

rezultă $\frac{1}{zx} = -\frac{1}{2a}$ (2p)

Așadar, $\frac{1}{xy} \cdot \frac{1}{yz} \cdot \frac{1}{zx} = \left(\frac{1}{2a} + 1\right)\left(\frac{1}{2a} - 1\right)\left(-\frac{1}{2a}\right)$.

Adică $\frac{1}{x^2y^2z^2} = \left(\frac{1}{4a^2} - 1\right)\left(-\frac{1}{2a}\right) = \left(1 - \frac{1}{4a^2}\right)\left(\frac{1}{2a}\right) = \frac{4a^2-1}{8a^3}$(1p)

Cum $a > \frac{1}{2}$, atunci $4a^2 - 1 > 0$ (0.5p)

Așadar $x^2y^2z^2 = \frac{8a^3}{4a^2-1}$, de unde $xyz \in \left\{-\sqrt{\frac{8a^3}{4a^2-1}}, \sqrt{\frac{8a^3}{4a^2-1}}\right\}$ (1p)

2. a. Presupunem prin reducere la absurd că $a + b + c = x^2, x \in \mathbb{N}$.

Avem $a^2 + b^2 + c^2 < (a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$ adică

$2021 < x^4 \leq 3 \cdot 2021$, deci $6 < x < 9$ (1p)

Deoarece $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$ și cum

$a^2 + b^2 + c^2 = 2021$ este impar, rezultă că $a + b + c = x^2$ este impar și deci $x = 7$ (0.5p)

Din $a^2 + b^2 + c^2 = 2021$ și $a + b + c = 7^2$ deducem $b + c = 49 - a$ și apoi

$(b + c)^2 > b^2 + c^2$ adică $(49 - a)^2 \geq 2021 - a^2$. Așadar $a^2 - 49a + 190 \geq 0$.

Rezultă $a \geq \frac{49+\sqrt{1641}}{2}$ sau $a \leq \frac{49-\sqrt{1641}}{2}$ (1p)



În primul caz $a \geq 45$, deci $a^2 \geq 2025$ și deci $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2025 > 2021$, fals
.....(1p)

Iar în al doilea caz avem $a \leq 4$ și analog $b \leq 4$ și $c \leq 4$ ceea ce contrazice
 $a + b + c = 49$.

Deci presupunerea este falsă, $a + b + c \neq x^2, \forall x \in \mathbb{N}$

b. Să notăm cu v vârsta persoanei cea mai învârstă. Conform ipotezei, v este media aritmetică a persoanelor din stânga, s și dreapta d . Cum $s, d \leq v$ și $v = \frac{s+d}{2}$, rezultă că $v=s=d$. Atfel spus, cele 3 persoane au aceeași vârstă.....(1p)

Din aproape în aproape, constatăm că toate persoanele au aceeași vârstă v ...(1p)

Cum suma vârstelor este $7v$, problema este rezolvată.....(1p)

3.

a) Notăm cu x muchia cubului. $AA' \perp (ADC)$ și $AN \subset (ADC)$ deci $AA' \perp AN$.

Deci $A_{AA'N} = AA' \cdot \frac{AN}{2}$ (1p)

Din Teorema lui Pitagora în triunghiul ADN se obține $AN = \frac{x\sqrt{10}}{3}$ (0.5p)

De unde rezultă că $A_{AA'N} = \frac{x^2 \sqrt{10}}{6}$ deci $\frac{x^2 \sqrt{10}}{6} = \frac{8\sqrt{10}}{3}$ și se obține $x=4$..(0.5p)

b) $(AA'N) \cap (DD'A) = AA'$, $AA' \perp AN$ și $AA' \perp AD$, $AN \subset (A'AN)$ și $AD \subset (DD'A)$ rezultă că $\angle((AA'N), (ADD')) = \angle DAN$ (2p)

$\cos(\angle DAN) = \frac{AD}{AN} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$(1p)

c) Fie $E \in AN$ astfel încât $DE \perp AN$. Dar $AA' \perp (ADC)$ și $DE \subset (ADC)$ deci

$DE \perp AA'$(0.5p)

Cum AA' și $AN \subset (AA'N)$ rezultă că $DE \perp (AA'N)$ deci distanța de la D la $(AA'N)$ este DE (1p)

$DE = \frac{AD \cdot DN}{AN} = \frac{x}{\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$(0.5p)

Problema specială

Din inegalitatea lui Titu Andreescu,

$$\frac{a^4}{a+5b} + \frac{b^4}{b+5c} + \frac{c^4}{c+5a} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a+5b+b+5c+c+5a} = \frac{9}{6(a+b+c)} = \frac{3}{2(a+b+c)}$$

Deci ar fi suficient de demonstrat: $\frac{3}{2(a+b+c)} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3 \geq a + b + c$



Infinity

Concurs de
matematică și gândire logică



Dar, folosind $a^2 + 1 \geq 2a$ (se reduce la $(a - 1)^2 \geq 0$)

$$6 = a^2 b^2 c^2 + 3 = (a^2 + 1) + (b^2 + 1) + (c^2 + 1) \geq 2a + 2b + 2c \Rightarrow \\ 3 \geq a + b + c$$

, ceea ce trebuia demonstrat.

Deci inegalitatea are loc.

Notă: Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.