Colegiul Național “Ștefan cel Mare” **Suceava** **14** ***decembrie 2021***

Lucrare scrisă semestrială
semestrul I
MATEMATICĂ

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 1 punct din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 50 de minute.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

1. Știind că $x > y, x > 0, y > 0$ și $\lg(x-y) = \dfrac{\lg x + \lg 2y}{2}$ calculați valoarea raportului $\dfrac{x}{y}$.

2. Se consideră expresia $E(x) = \dfrac{\log_3 x + \log_3 \sqrt[3]{x}}{\log_2 x^2 + \log_2 \sqrt[4]{x}}, x \in (0,\infty) \setminus \{1\} = D$. Arătați că există $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ astfel încât $F(x) = r, \forall x \in D$.

3. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+4}, x \geq 0 \\ 3x+2, x < 0 \end{cases}$.

a) Arătați că funcția este bijectivă.

b) Aflați inversa funcției.

4. Rezolvați ecuațiile:

a) $\sqrt[3]{x^2} + 13\sqrt[3]{x} + 30 = 0$

b) $x^2 - 3x + \sqrt{x^2 - 3x + 5} = 7$

5. Dacă $z \in \mathbb{C}, z = 1 - i$ calculați $E(z) = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{2021}$.

6. Se dau numerele complexe $z_1 = 4 - (3-a)i$ și $z_2 = (1+2b) + 4\sqrt{2}i$ .Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $|z_1| = 4$ și $|z_2| = 1 + 2|z_1|$.

7. Fie $a, b \in \mathbb{C}, |a| = |b| = 1$.Calculați $\mathrm{Im}\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)$.