14. XII.2021

TEZĂ LA MATEMATICĂ sem.I

clasa a XII-a, matematică-informatică

Nr.1

I. Pe mulțimea numerelor reale definim legea de compoziție $x*y=3xy-6x-6y+14$.

(1**0p**) a) Să se determine elementul neutru al legii date.

(10**p**) b) Să se arate că mulțimea $G=[2,\infty)$ este parte stabilă a mulțimiii numerelor reale în raport cu legea $*$.

(1**0p**) c) Arătați că există două numere $a,b\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ astfel încât $a*b\in\mathbb{Z}$.

(1**0p**) d) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\underbrace{x*x*...*x}_{2021}=x$.

(1**0p**) e) Admitem că $(2,\infty)$ formează o structură de grup împreună cu legea $*$. Determinați $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care funcția $f:(2,\infty)\to(0,\infty),\ f(x)=ax+b$ este izomorfism între grupurile $((2,\infty),*)$ și $((0,\infty),\cdot)$.

II. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}(x+1)e^x, & x<0\\ 2x+1, & x\geq 0\end{cases}$.

(**10p**) a) Arătați că *f* admite primitive pe $\mathbb{R}$ și determinați primitiva *F* cu proprietatea $F(1)=2$.

(**20p**) b) Calculați integralele $I_1=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$ și $I_2=\int_{-\ln 2}^{e-1}\frac{f(x)}{x+1}dx$.

(1**0p**) c) Folosind eventual inegalitatea $e^x\geq x+1,\forall x\in\mathbb{R}$, arătați că $\int_{-\ln 2}^{0}f(x)dx\leq\frac{3}{8}$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 50 minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

14. XII.2021

TEZĂ LA MATEMATICĂ sem.I

clasa a XII-a, matematică-informatică

Nr.2

I. Pe mulțimea numerelor reale definim legea de compoziție $x*y=2xy-6x-6y+21$.

(1**0p**) a) Să se determine elementul neutru al legii date.

(10**p**) b) Să se arate că mulțimea $G=[3,\infty)$ este parte stabilă a mulțimiii numerelor reale în raport cu legea $*$.

(1**0p**) c) Arătați că există două numere $a,b\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ astfel încât $a*b\in\mathbb{Z}$.

(1**0p**) d) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\underbrace{x*x*...*x}_{2021}=x$.

(1**0p**) e) Admitem că $(3,\infty)$ formează o structură de grup împreună cu legea $*$. Determinați $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care funcția $f:(3,\infty)\to(0,\infty),\ f(x)=ax+b$ este izomorfism între grupurile $((3,\infty),*)$ și $((0,\infty),\cdot)$.

II. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2x-1, & x<1\\ \ln x+1, & x\geq 1\end{cases}$.

(**10p**) a) Arătați că *f* admite primitive pe $\mathbb{R}$ și determinați primitiva *F* cu proprietatea $F(0)=0$.

(**20p**) b) Calculați integralele $I_1=\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx$ și $I_2=\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{f(x)}{x^2}dx$.

(1**0p**) c) Folosind eventual inegalitatea $\ln x\leq x-1, \forall x>0$, arătați că $\int_1^2 f(x)\cdot(x-1)dx\leq\frac{5}{6}$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 50 minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.