

Lucrare scrisă semestrială la matematică
Specializarea științe ale naturii, semestrul I, clasa a XII-a, nr.1

I. Pe mulțimea numerelor reale \mathbb{R} se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 3xy - (x + y) + \frac{2}{3}$.

a) Calculați $5 \circ \frac{2}{3}$.

b) Arătați că $x \circ y = \left(x - \frac{1}{3}\right)\left(y - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}$ pentru orice numere reale x, y .

c) Determinați elementul neutru al legii „ \circ ”.

d) Determinați numerele reale x , care sunt egale cu simetricile lor în raport cu legea „ \circ ”.

e) Calculați: $1 \circ \frac{1}{\sqrt{3}} \circ \frac{1}{\sqrt{5}} \circ \dots \circ \frac{1}{\sqrt{2021}}$.

2. Să considerăm funcția $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x+1}$ și funcția $F : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = x - \ln(x+1)$.

a) Arătați că F este o primitivă a funcției f pe intervalul $(-1, \infty)$.

b) Calculați: $\int_0^1 x^{2020} f(x) dx + \int_0^1 x^{2021} f(x) dx$

c) Arătați că: $\int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2 \left(1 + \ln \frac{2}{3}\right)$

d) Arătați că: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{2}$

Timp de lucru: 50 min

Lucrare scrisă semestrială la matematică
Specializarea științe ale naturii, semestrul I, clasa a XII-a, nr.2

I. Pe mulțimea numerelor reale \mathbb{R} se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 6xy - 2x - 2y + 1$.

a) Calculați $5 \circ \frac{1}{2}$.

b) Arătați că $x \circ y = 6 \left(x - \frac{1}{3}\right)\left(y - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}$ pentru orice numere reale x, y .

c) Determinați numerele reale x , pentru care $x \circ x \circ x = x$.

d) Determinați elementul neutru al legii „ \circ ”.

e) Dați exemplu de două numere $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ pentru care $a \circ b$ este număr natural.

2. Să considerăm funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x(2x+3)$

a) Determinați numerele reale a, b pentru care funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = e^x(ax+b)$ este o primitivă a lui f pe \mathbb{R} .

b) Calculați: $\int_0^1 (f(x) + f'(x)) e^x dx$

c) Arătați că: $\int_1^e \frac{f(\ln(x))}{x} dx = 3e - 1$

d) Arătați că: $\int_1^2 f(x) F^2(x) dx = \frac{5e^2 - 3e}{3}$.

Timp de lucru: 50 min